BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2006

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ ОБОБЩЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Ф.С.АЛИЕВ

Бакинский Государственный Университет

Рассматривается уравнение вида

$$Ly \equiv \sum_{k=0}^{m} a_k x^{k+r} y^{(k)}(x) + \sum_{q=0}^{n} b_q x^q y^{(q)}(x) = 0$$

в пространстве обобщенных функций $(S_0^\beta)'$*, с некоторым* $\beta > 1$*;* $m > n$*,* $r > 0$ *– целые числа.*

Находится $(2m + r)$ *линейно-независимых решений вида*

$$y = \sum_\lambda \xi_\lambda f^\lambda(x) + \sum_\lambda \eta_\lambda g^\lambda(x),$$

где λ *распространяется по некоторым арифметическим прогрессиям с разностью* r*, которые образуют фундаментальную систему решений рассмотренного уравнения.*

В данной статье исследуются сингулярные дифференциальные уравнения вида

$$Ly \equiv \sum_{k=0}^{m} a_k x^{k+r} y^{(k)}(x) + \sum_{q=0}^{n} b_q x^q y^{(q)}(x) = 0 \tag{1}$$

в пространстве обобщенных функций $(S_0^\beta)'$ ([1]), с некоторым $\beta > 1$, где $m > n$ – целые числа, $r > 0$ – целое число.

Классические решения таких уравнений вблизи особой точки $(x = 0)$ имеют экспоненциальный рост [3] и допускают регуляризацию в пространстве $(S_0^\beta)'$ [4].

Обозначим через Ω подпространство всех решений уравнения (1) в $(S_0^\beta)'$. Пусть Ω_0 означает совокупность всех решений уравнения (1), сосредоточенных в нуле. Очевидно, что Ω_0 есть подпространство и $\Omega_0 \subset \Omega$.

Теорема 1. Размерность подпространства Ω_0 в $(S_0^\beta)'$ равна r.

Доказательство. Функционал, сосредоточенный в точке $x = 0$, в $(S_0^\beta)'$ имеет общий вид [5]

$$y=\sum_{j=0}^{\infty} c_j \delta^{(j)}(x). \tag{2}$$

Следует проверить, сколько свободных констант c_j в этом ряду, представляющем решение уравнения (1). Подставляя ряд (2) в уравнение (1) и используя формулы, приведенные в ([6], [7]), получаем:

$$L\left[\sum_{j=0}^{\infty} c_j \delta^{(j)}(x)\right]=\sum_{k=0}^{m} a_k x^{k+r}\left[\sum_{j=0}^{\infty} c_j \delta^{(j)}(x)\right]^{(k)}+\sum_{q=0}^{n} b_q x^q\left[\sum_{j=0}^{\infty} c_j \delta^{(j)}(x)\right]^{(q)}=$$

$$=\sum_{k=0}^{m} a_k x^{k+r}\sum_{j=0}^{\infty} c_j \delta^{(j+k)}(x)+\sum_{q=0}^{n} b_q x^q\sum_{j=0}^{\infty} c_j \delta^{(j+q)}(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{m} a_k \sum_{j=r}^{\infty} c_j (-1)^{k+r}[j+k]_{k+r}\,\delta^{(j-r)}+\sum_{q=0}^{n} b_q\sum_{j=0}^{\infty} c_j (-1)^q[j+q]_q\,\delta^{(j)}=$$

$$=\sum_{j=0}^{\infty}\left\{c_{j+r}\sum_{k=0}^{m} a_k(-1)^{k+r}[j+r+k]_{k+r}+c_j\sum_{q=0}^{n} b_q(-1)^q[j+q]_q\right\}\delta^{(j)}.$$

Итак, имеем

$$L\left[\sum_{j=0}^{\infty} c_j \delta^{(j)}(x)\right]=\sum_{j=0}^{\infty}[Q_j c_{j+r}+R_j c_j]\delta^{(j)}(x), \tag{3}$$

где

$$\left.\begin{aligned} Q_j&=\sum_{k=0}^{m} a_k(-1)^{k+r}[j+r+k]_{r+k}\\ R_j&=\sum_{q=0}^{n} b_q(-1)^q[j+q]_q \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Допустим, что выражение (2) является решением уравнения (1). Тогда в силу линейной независимости $\delta^{(j)}(x)$, при различных j для определения коэффициентов c_j получаем следующую рекуррентную систему алгебраических уравнений:

$$Q_j c_{j+r}+R_j c_j=0,\quad j=0,1,2,\ldots\ . \tag{5}$$

Разобьем систему (5) на r подсистем: первая выделяется из (5) при значениях $j=0,r,2r,\ldots,kr,\ldots$; вторая при $j=1,1+r,1+2r,\ldots,1+kr,\ldots$; …, r-та при $j=r-1,\ r-1+r,\ \ldots,\ r-1+kr,\ \ldots$; $(k=0,1,2,\ldots)$.

Теперь докажем, что в каждой подсистеме имеется один и только один свободный c_{j_0}, а все остальные c_j определяются через него однозначно. Для определенности возьмем первую подсистему:

$$\left.\begin{aligned} &Q_0 c_r+R_0 c_0=0,\\ &Q_r c_{2r}+R_r c_r=0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &Q_{(n-1)r} c_{nr}+R_{(n-1)r} c_{(n-1)r}=0. \end{aligned}\right\} \tag{5$_1$}$$

Очевидно, что задавая c_0 произвольно, легко определить последующие c_{kr} $(k=1,2,\ldots)$ по следующим формулам:

$$c_r=-\frac{R_0}{Q_0}c_0,\quad c_{2r}=-\frac{R_r}{Q_r}c_r=\frac{(-1)^2R_rR_0}{Q_rQ_0},\ldots,\ c_{kr}=\frac{(-1)^kR_{(k-1)r}R_{(k-2)r}\cdots R_0}{Q_{(k-1)r}Q_{(k-2)r}\cdots Q_0}.$$

Легко проверить, что c_{kr} $(k=1,2,\ldots)$ допускают оценки

$$|c_{kr}|\le\frac{A^k}{k^{k(m+r-n)}},\quad k\to\infty,\quad A=const\,. \tag{6}$$

Проверим, что ряд (2) с коэффициентами c_{kr} $(k=0,1,2,\ldots)$ сходится в пространстве $(S_0^\beta)'$ с некоторым $\beta>1$. Действительно,

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}c_{kr}\,\delta^{(kr)}(x),\varphi(x)\right|=\left|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{kr}c_{kr}\,\varphi^{(kr)}(0)\right|\le\sum_{k=0}^{\infty}|c_{kr}|\,|\varphi^{(kr)}(0)|\le$$

$$\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^kB^{kr}(kr)^{kr\beta}}{k^{k(m+r-n)}}\le\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_0^k}{k^{k(m+r-n-\beta r)}}<\infty\quad\text{при}\quad\beta<\frac{m-n+r}{r}=1+\frac{m-n}{r}.$$

Итак, мы доказали, что система (5_1) определяет одно решение уравнения (1) вида $y_1=\sum_{k=0}^{\infty}c_{kr}\,\delta^{(kr)}(x)$ со свободным коэффициентом c_0.

Совершенно аналогично остальные подсистемы алгебраических уравнений системы (5) определяют по одному решению уравнения (1). Количество таких подсистем r, а значит и всего линейно-независимых решений вида (2) уравнения (1) также r. Коэффициенты c_j этих решений определяются через свободные коэффициенты $(c_0,c_1,\ldots,c_r)$ по рекуррентным формулам (5). Например, беря $(j=0,\ldots,r-1)$ по системе векторов $(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,0,\ldots,1)$ получим следующую систему решений уравнения (1):

$$y_0(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{kr}\,\delta^{(kr)},\quad y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{kr+1}\delta^{(kr+1)}(x),\ldots,y_{r-1}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_{kr+(r-1)}\delta^{(kr+r-1)},$$

где

$$c_{kr+j}=\left((-1)^k\prod_{i=1}^{k}R_{(k-i)r+j}c_j\right)\Big/\left(\prod_{i=0}^{k}Q_{(k-i)r+j}\right)\quad(j=0,1,2,\ldots,r-1),$$

определяющую базис в подпространстве Ω_0.

Этим теорема доказана.

Определение. Если арифметическая прогрессия с разностью r, построенная над корнем λ_0, содержит k корней многочлена $A(\lambda)$ (с учетом их кратностей), то будем говорить, что λ_0 является обобщенно-кратным по модулю r корнем многочлена $A(\lambda)$ порядка k. Если же арифметические прогрессии с разностью r, построенные на корнях многочлена $A(\lambda)$ не пересекаются, будем говорить, что многочлен $A(\lambda)$ не имеет обобщенно-кратных корней по модулю r.

Очевидно, что обычные кратные корни являются обобщенно-кратными по меньшей мере того же порядка по любому модулю, но обратное, вообще говоря, не справедливо.

Положим

$$A(\lambda)=\left[\frac{\lambda-1}{2}\right]_{E\left(\frac{r}{2}\right)} R(\lambda), \qquad B(\lambda)=\left[\frac{\lambda}{2}\right]_{E\left(\frac{r+1}{2}\right)} R(\lambda),$$

$$C(\lambda)=\sum_{q=0}^{n} b_q[\lambda]_q, \qquad R(\lambda)=\sum_{k=0}^{m} a_k[\lambda-r]_k.$$

Имеет место следующая

Теорема 2. Если характеристический многочлен $R(\lambda)$ не имеет обобщенно-кратных корней по модулю r, то уравнение (1) в пространстве $(S_0^\beta)'$ $\left(1<\beta<1+\dfrac{m-n}{2}\right)$ имеет $(2m+r)$ линейно-независимых решений вида

$$y=\sum_\lambda \xi_\lambda f^\lambda(x)+\sum_\lambda \eta_\lambda g^\lambda(x), \tag{7}$$

где λ меняется по некоторым арифметическим прогрессиям с разностью r.

Доказательство. Достаточно показать, что в разложении (7) имеется $(2m+r)$ свободных коэффициентов, позволяющих определить все остальные так, чтобы оно являлось решением уравнения (1). Предположим пока, что r четное. Подставляя выражение (7) в уравнение (1) и используя формулы ([7]) умножения на степени x обобщенных функций $f^\lambda(x)$ и $g^{(\lambda)}(x)$, получаем:

$$Ly=\sum_{k=0}^{m} a_k x^{k+r} y^{(k)}+\sum_{q=0}^{n} b_q x^q y^{(q)}=\sum_{k=0}^{m} a_k x^{k+r}\left[\sum_\lambda \xi_\lambda f^\lambda(x)+\sum_\lambda \eta_\lambda g^\lambda(x)\right]^{(k)}+$$

$$+\sum_{q=0}^{n} b_q x^q\left[\sum_\lambda \xi_\lambda f^\lambda(x)+\sum_\lambda \eta_\lambda g^\lambda(x)\right]^{(q)}=$$

$$=\sum_\lambda \xi_\lambda\left\{\sum_{k=0}^{m}{}'' a_k x^{k+r}[f^\lambda(x)]^{(k)}+\sum_{k=0}^{m}{}' a_k x^{k+r}[f^\lambda(x)]^{(k)}\right\}+$$

$$+\sum_\lambda \eta_\lambda\left\{\sum_{k=0}^{m}{}'' a_k x^{k+r}[g^\lambda(x)]^{(k)}+\sum_{k=0}^{m}{}' a_k x^{k+r}[g^\lambda(x)]^{(k)}\right\}+$$

$$+\sum_\lambda \eta_\lambda\left\{\sum_{q=0}^{n}{}'' b_q x^q[g^\lambda(x)]^{(q)}+\sum_{q=0}^{n}{}' b_q x^q[g^\lambda(x)]^{(q)}\right\}=$$

$$=\sum_\lambda \xi_\lambda\left\{\sum_{k=0}^{m} a_k 2^k\left[\frac{\lambda}{2}\right]_{k/2}\left[\frac{\lambda+r-1}{2}\right]_{(k+r)/2} f^{\lambda+r}(x)+\right.$$

$$+\sum_{k=0}^{m}{}' a_k\, 2^k \left[\frac{\lambda}{2}\right]_{(k+1)/2} \left[\frac{\lambda+r-1}{2}\right]_{(k+r-1)/2} f^{\lambda+r}(x) \Bigg\} +$$

$$+\sum_{\lambda} \eta_{\lambda} \Bigg\{ \sum_{k=0}^{m} a_k\, 2^k \left[\frac{\lambda-1}{2}\right]_{k/2} \left[\frac{\lambda+r}{2}\right]_{(k+r)/2} g^{\lambda+r}(x) +$$

$$+\sum_{k=0}^{m}{}' a_k\, 2^k \left[\frac{\lambda-1}{2}\right]_{(k-1)/2} \left[\frac{\lambda+r}{2}\right]_{(k+r+1)/2} g^{\lambda+r}(x) \Bigg\} +$$

$$+\sum_{\lambda} \xi_{\lambda} \Bigg\{ \sum_{q=0}^{n}{}'' b_q\, 2^q \left[\frac{\lambda}{2}\right]_{q/2} \left[\frac{\lambda-1}{2}\right]_{q/2} f^{\lambda}(x) +$$

$$+\sum_{q=0}^{n}{}' b_q\, 2^q \left[\frac{\lambda}{2}\right]_{(q+1)/2} \left[\frac{\lambda-1}{2}\right]_{(q-1)/2} f^{\lambda}(x) \Bigg\} +$$

$$+\sum_{\lambda} \eta_{\lambda} \Bigg\{ \sum_{q=0}^{n}{}'' b_q\, 2^q \left[\frac{\lambda-1}{2}\right]_{q/2} \left[\frac{\lambda}{2}\right]_{q/2} g^{\lambda}(x) +$$

$$+\sum_{q=0}^{m}{}' b_q\, 2^q \left[\frac{\lambda-1}{2}\right]_{(q-1)/2} \left[\frac{\lambda}{2}\right]_{(q+1)/2} g^{\lambda}(x) \Bigg\} =$$

$$=\sum_{\lambda} \xi_{\lambda-r} \sum_{k=0}^{m} a_k\, 2^k \left[\frac{\lambda-r}{2}\right]_{E\left(\frac{k+1}{2}\right)} \left[\frac{\lambda-1}{2}\right]_{E\left(\frac{k+r}{2}\right)} f^{\lambda}(x) +$$

$$+\sum_{\lambda} \eta_{\lambda-r} \sum_{k=0}^{m} a_k\, 2^k \left[\frac{\lambda-r-1}{2}\right]_{E\left(\frac{k}{2}\right)} \left[\frac{\lambda}{2}\right]_{E\left(\frac{k+r+1}{2}\right)} g^{\lambda}(x) +$$

$$+\sum_{\lambda} \xi_{\lambda} \sum_{q=0}^{n} b_q\, 2^q \left[\frac{\lambda}{2}\right]_{E\left(\frac{q+1}{2}\right)} \left[\frac{\lambda-1}{2}\right]_{E\left(\frac{q}{2}\right)} f^{\lambda}(x) +$$

$$+\sum_{\lambda} \eta_{\lambda} \sum_{q=0}^{n} b_q\, 2^q \left[\frac{\lambda-1}{2}\right]_{E\left(\frac{q}{2}\right)} \left[\frac{\lambda}{2}\right]_{E\left(\frac{q+1}{2}\right)} g^{\lambda}(x) =$$

$$=\sum_{\lambda} \Bigg\{ \xi_{\lambda-r} \sum_{k=0}^{m} a_k\, 2^k \left[\frac{\lambda-r}{2}\right]_{E\left(\frac{k+1}{2}\right)} \left[\frac{\lambda-1}{2}\right]_{\left(\frac{k+r}{2}\right)} +$$

$$+\xi_{\lambda} \sum_{q=0}^{n} b_q\, 2^q \left[\frac{\lambda}{2}\right]_{E\left(\frac{q+1}{2}\right)} \left[\frac{\lambda-1}{2}\right]_{E\left(\frac{q}{2}\right)} \Bigg\} f^{\lambda}(x) +$$

$$+\sum_{\lambda} \Bigg\{ \eta_{\lambda-r} \sum_{k=0}^{m} a_k\, 2^k \left[\frac{\lambda-r-1}{2}\right]_{E\left(\frac{k}{2}\right)} \left[\frac{\lambda}{2}\right]_{\left(\frac{k+r+1}{2}\right)} +$$

$$+\eta_{\lambda} \sum_{q=0}^{n} b_q\, 2^q \left[\frac{\lambda-1}{2}\right]_{E\left(\frac{q}{2}\right)} \left[\frac{\lambda}{2}\right]_{E\left(\frac{q+1}{2}\right)} \Bigg\} g^{\lambda}(x)\,.$$

Здесь два штриха и один штрих над знаком суммы означают, что суммирование распространяется по четным и нечетным k (q) соответственно.

Учитывая введенное обозначение, получим

$$L[y]=\sum_{\lambda}[A(\lambda)\xi_{\lambda-r}+C(\lambda)\xi_{\lambda}]f^{\lambda}(x)+\sum_{\lambda}[B(\lambda)\eta_{\lambda-r}+C(\lambda)\eta_{\lambda}]g^{\lambda}(x).$$

Предполагая, что выражение (7) является решением уравнения (1), в силу линейной независимости $f^{\lambda}(x)$ и $g^{\lambda}(x)$, при различных λ для определения ξ_{λ} и η_{λ} получаем следующую систему уравнений:

$$A(\lambda)\xi_{\lambda-r}+C(\lambda)\xi_{\lambda}=0, \tag{8}$$

$$B(\lambda)\eta_{\lambda-r}+C(\lambda)\eta_{\lambda}=0. \tag{9}$$

В силу четности r степени многочленов $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ равны $\frac{2m+r}{2}$. Имея корень λ_1 $(A(\lambda_1)=0)$, строим арифметическую прогрессию с разностью r, проходящую через λ_1.

Взяв в качестве ξ_{λ_1-r} произвольную постоянную, из (8) определяем последующие ξ_{λ} для всех значений $\lambda=\lambda_1-kr$ $(k=\pm 1,\pm 2,\ldots)$. Действительно, при указанных λ из уравнения (8) имеем:

$$\left.\begin{array}{l}
A(\lambda_1)\xi_{\lambda_1-r}+C(\lambda_1)\xi_{\lambda_1}=0,\\
A(\lambda_1-r)\xi_{\lambda_1-2r}+C(\lambda_1-r)\xi_{\lambda_1-r}=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A(\lambda_1-(k-1)r)\xi_{\lambda_1-kr}+C(\lambda_1-(k-1)r)\xi_{\lambda_1-(k-1)r}=0,
\end{array}\right\} \tag{10}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left.\begin{array}{l}
A(\lambda_1+r)\xi_{\lambda_1}+C(\lambda_1+r)\xi_{\lambda_1+r}=0,\\
A(\lambda_1+2r)\xi_{\lambda_1+r}+C(\lambda_1+2r)\xi_{\lambda_1+2r}=0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
A(\lambda_1+kr)\xi_{\lambda_1+(k-1)r}+C(\lambda_1+kr)\xi_{\lambda_1+kr}=0.
\end{array}\right\} \tag{11}$$

Из системы уравнений (10) получаем

$$\xi_{\lambda_1-2r}=-\frac{C(\lambda_1-r)}{A(\lambda_1-r)}\xi_{\lambda_1-r},$$

$$\xi_{\lambda_1-3r}=-\frac{C(\lambda_1-2r)}{A(\lambda_1-2r)}\xi_{\lambda_1-2r}=\frac{(-1)^2C(\lambda_1-2r)C(\lambda_1-r)}{A(\lambda_1-2r)A(\lambda_1-r)}\xi_{\lambda_1-r},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\xi_{\lambda_1-kr}=\frac{(-1)^{k-1}C(\lambda_1-(k-1)r)C(\lambda_1-(k-2)r)\cdot\ldots\cdot C(\lambda_1-r)}{A(\lambda_1-(k-1)r)A(\lambda_1-(k-2)r)\cdot\ldots\cdot A(\lambda_1-r)}\xi_{\lambda_1-r}.$$

Первое уравнение системы (10) определяет $\xi_{\lambda_1}=0$. Учитывая это, последовательно из системы уравнений (11) получаем, что $\lambda_{\lambda_1+kr}=0$ $(k=$ $=1,2,\ldots)$. Итак, имеем

$$\xi_{\lambda_1-kr}=\frac{(-1)^{k-1}\prod_{j=1}^{k-1}C(\lambda_1-jr)}{\prod_{j=1}^{k-1}A(\lambda_1-jr)}\xi_{\lambda_1-r}\quad(k=2,3,\ldots),\tag{12}$$

$\xi_{\lambda_1+kr}=0$ для значений $k=0,1,2,\ldots$.

Коэффициенты ξ_{λ_1-kr} допускают оценки

$$\left|\xi_{\lambda_1-kr}\right|\le\frac{A^k}{k^{\frac{k(2m+r-2n)}{2}}},\quad k\to\infty,\quad A=const\ ,\tag{13}$$

что обеспечивает сходимость ряда по f^{λ_1-kr} с найденными коэффициентами ξ_{λ_1-kr} в пространстве $(S_0^{\beta})'$, $1<\beta<1+\frac{m-n}{r}$. Таким образом, по корню λ_1 многочлена $A(\lambda)$ мы построили одно решение уравнения (1) в виде ряда по $f^{\lambda}(x)$, а именно

$$y_1=\sum_{k=1}^{\infty}\xi_{\lambda_1-kr}f^{\lambda_1-kr}(x),$$

где коэффициенты ξ_{λ_1-kr} определены по формуле (12). Производя эту процедуру над каждым корнем $A(\lambda)$, получим, что уравнение (8) определяет $\frac{2m+r}{2}$ решений уравнения (1). Все эти решения через корни λ_j многочлена $A(\lambda)$ могут быть явно выписаны:

$$y_j\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\xi_{\lambda_j-kr}f^{\lambda_j-kr}(x),\qquad \xi_{\lambda_j-kr}=\frac{(-1)^{k-1}\prod_{i=1}^{k-1}C(\lambda_j-ir)}{\prod_{i=1}^{k-1}A(\lambda_j-ir)}\xi_{\lambda_j-r},$$

$$j=1,2,\ldots,\frac{2m+r}{2}\quad(k=2,3,\ldots),\quad \xi_{\lambda_j+kr}=0\quad(k=0,1,2,\ldots).\tag{14}$$

Совершенно аналогично, по корням многочлена $B(\lambda)$ мы можем построить $\frac{2m+r}{2}$ решений уравнения (1). Если через μ_j $\left(j=1,2,\ldots,\frac{2m+r}{2}\right)$ обозначить корни многочлена $B(\lambda)$, то соответствующие решения легко написать по рядам $g^{\mu_j}(x)$:

$$z_j = \sum_{k=1}^{\infty} \eta_{\mu_j - kr} g^{\mu_j - kr}(x), \qquad \eta_{\mu_j - kr} = \frac{(-1)^{k-1} \prod\limits_{i=1}^{k-1} C(\mu_j - ir)}{\prod\limits_{i=1}^{k-1} B(\mu_j - ir)} \eta_{\mu_j - ir},$$

$$(k = 2,3,\dots),\ j = 1,2,\dots,\frac{2m+r}{2},\ \eta_{\mu_j + kr} = 0 \ \text{для значений}\ k = 0,1,2,\dots \,. \quad (15)$$

Очевидно, что для коэффициентов $\eta_{\mu_j - kr}$ справедливы оценки (13). Ввиду того, что $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ не имеют обобщенно-кратных корней, найденные решения (14) и (15) линейно-независимы как в отдельности, так и вместе взятые. Таким образом, по корням многочленов $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ мы построили $(2m+r)$ решений в виде рядов (14) и (15) по $f^{\lambda}(x)$ и $g^{\lambda}(x)$. Итак, теорема доказана при четном r. Допустим теперь, что r нечетно. Вычисляя аналогичным образом выражения $L[y]$ для нечетного r получим:

$$L[y] = \sum_{\lambda} [\eta_{\lambda - r} A(\lambda) + \xi_{\lambda} C(\lambda)] f^{\lambda}(x) + \sum_{\lambda} [\xi_{\lambda - r} B(\lambda) + \eta_{\lambda} C(\lambda)] g^{\lambda}(x).$$

Теперь предполагая, что выражение (7) является решением уравнений (1) при нечетном r, для определения коэффициентов ξ_{λ} и η_{λ} получаем следующую систему алгебраических уравнений:

$$A(\lambda)\eta_{\lambda - r} + C(\lambda)\xi_{\lambda} = 0, \quad (16)$$

$$B(\lambda)\xi_{\lambda - r} + C(\lambda)\eta_{\lambda} = 0. \quad (17)$$

Пусть λ_1 корень многочлена $A(\lambda)$ $(A(\lambda_1) = 0)$. Зададим $\eta_{\lambda_1 - r}$ произвольным. Из уравнения (16) получаем, что $\xi_{\lambda_1} = 0$. Имея это, из уравнения (17) при значении $\lambda = \lambda_1 + r$ получаем, что $\eta_{\lambda_1 + r} = 0$. Придавая λ последовательно значения $\lambda_1, \lambda_1 + r, \lambda_1 + 2r, \dots, \lambda_1 + kr$, из уравнений (16) и (17) получаем:

$$\xi_{\lambda_1} = \xi_{\lambda_1 + 2r} = \dots = \xi_{\lambda_1 + 2kr} = 0,\ \eta_{\lambda_1 + r} = \xi_{\lambda_1 + 3r} = \dots = \xi_{\lambda_1 + (2k+1)r} = 0,\ k = 0,1,2,\dots \,.$$

Из уравнения (17) при значении $\lambda = \lambda_1 - r$ получаем, что

$$\xi_{\lambda_1 - 2r} = -\frac{C(\lambda_1 - r)}{B(\lambda_1 - r)} \eta_{\lambda_1 - r}.$$

При значении $\lambda = \lambda_1 - 2r$ из (16) следует:

$$\eta_{\lambda_1 - 3r} = -\frac{C(\lambda_1 - 2r)}{A(\lambda_1 - 2r)} \xi_{\lambda_1 - 2r} = \frac{(-1)^2 C(\lambda_1 - 2r) C(\lambda_1 - r)}{A(\lambda_1 - 2r) B(\lambda_1 - r)}.$$

Из (17) же при значении $\lambda = \lambda_1 - 3r$ получаем:

$$\xi_{\lambda_1 - 4r} = -\frac{C(\lambda_1 - 3r)}{B(\lambda_1 - 3r)} \eta_{\lambda_1 - 3r} = \frac{(-1)^3 C(\lambda_1 - 3r) C(\lambda_1 - 2r) C(\lambda_1 - r)}{B(\lambda_1 - 3r) A(\lambda_1 - 2r) B(\lambda_1 - r)} \eta_{\lambda_1 - r}.$$

Продолжая придавать значения $\lambda = \lambda_1 - kr$ $(k = 1,2,\dots)$ определяем все значения ξ_{λ_1-2kr} и $\eta_{\lambda_1-(2k+1)r}$ $(k=1,2,\dots)$ по следующим формулам:

$$\xi_{\lambda_1-2kr}=-\frac{\prod_{j=1}^{2k-1}C(\lambda_1-jr)}{\prod_{j=1}^{k}B\left(\lambda_1-(2j-1)r\prod_{j=1}^{k-1}A(\lambda-2jr)\right)}\eta_{\lambda_1-r}, \tag{18}$$

$$\eta_{\lambda_1-(2k+1)r}=\frac{\prod_{j=1}^{2k}C(\lambda_1-jr)}{\prod_{j=1}^{k}A\left((\lambda_1-2jr)\prod_{j=1}^{k}B[\lambda_1-(2j-1)r]\right)}\eta_{\lambda_1-r}. \tag{19}$$

Если допустить $\eta_{\lambda_1}\neq 0$, то последовательно из уравнений (16) и (17) можем определить значения $\xi_{\lambda_1\pm(2k+1)r}$ и $\eta_{\lambda_1\pm 2kr}$. При этом коэффициенты $\xi_{\lambda_1+(2k+1)r}$ и η_{λ_1+2kr} растут с ростом k и соответствующие ряды расходятся в $(S_0^\beta)'$. Отсюда следует, что должно быть $\eta_{\lambda_1}=0$. Имея это, поочередно из уравнений (16) и (17) находим, что при всех значения $k=0,1,2,\dots$.

$$\xi_{\lambda_1+(2k+1)r}=\eta_{\lambda_1+2kr}=0.$$

Итак, имея корень λ_1 многочлена $A(\lambda)$ $(B(\lambda_1)\neq 0)$ мы строим одно решение уравнения (1) вида

$$y_1=\sum_{k=1}^{\infty}[\xi_{\lambda_1-2kr}f^{\lambda_1-2kr}(x)+\eta_{\lambda_1-(2k+1)r}g^{\lambda_1-(2k+1)r}(x)],$$

где коэффициенты ξ_{λ_1-2kr} и $\eta_{\lambda_1-(2k+1)r}$ определены соответственно по формулам (18) и (19) через свободный коэффициент η_{λ_1-r}. Производя над каждым корнем многочлена $A(\lambda)$ $(R(\lambda)\neq 0)$ эту процедуру, мы построили $\frac{r-1}{2}$ решений уравнений (1) вида:

$$y_j=\sum_{k=1}^{\infty}[\xi_{\lambda_j-2kr}f^{\lambda_j-2kr}(x)+\eta_{\lambda_j-(2k+1)r}g^{\lambda_j-(2k+1)r}(x)], \tag{20}$$

где

$$\xi_{\lambda_j-2kr}=-\frac{\prod_{i=1}^{2k-1}C(\lambda_j-ir)}{\prod_{i=1}^{k}B(\lambda_j-(2i-1))r\prod_{i=1}^{k}A(\lambda_j-2ir)}\eta_{\lambda_j-r},$$

$$\eta_{\lambda_j-(2k+1)r}=\frac{\prod_{i=1}^{2k}C(\lambda_j-ir)\eta_{\lambda_j-r}}{\prod_{i=1}^{k}A(\lambda_j-2ir)\prod_{i=1}^{k-1}B(\lambda_j-(2i-1)r)},\quad j=1,2,\dots,\frac{r-1}{2}. \tag{21}$$

Совершенно аналогично, повторяя все эти рассуждения, относительно корней многочлена $B(\lambda)$ $(R(\lambda)\neq 0)$ мы построим $\frac{r+1}{2}$ решений уравнения (1) вида

$$z_j=\sum_{k=1}^{\infty}[\xi_{\mu_j-(2k+1)r}f^{\mu_j-(2k+1)r}(x)+\eta_{\mu_j-2kr}g^{\mu_j-2kr}(x)], \tag{22}$$

где

$$\left.\begin{aligned}\xi_{\mu_j-(2k+1)r}&=\frac{\prod_{i=1}^{2k}C(\mu_j-ir)\xi_{\mu_j-r}}{\prod_{i=1}^{k}B(\mu_j-2ir)\prod_{i=1}^{k}A(\mu_j-(2i-1)r)},\\ \eta_{\mu_j-2kr}&=\frac{\prod_{i=1}^{2k-1}C(\mu_j-ir)\xi_{\mu_j-r}}{\prod_{i=1}^{k}A(\mu_j-(2i-1)r)\prod_{i=1}^{k}B(\mu_j-2ir)},\end{aligned}\right\}\quad j=1,2,\dots,\frac{r+1}{2}. \tag{23}$$

Коэффициенты (21) и (23) допускают оценки (13), что и обеспечивает сходимость рядов (20) и (22) в пространстве $(S_0^{\beta})'$, $1<\beta<1+\frac{m-n}{2}$. Эти y_j и z_j $\left(j=1,2,\dots,\frac{r+1}{2}\right)$ определяют сосредоточенные в нуле решения уравнения (1). Пусть теперь $\lambda=\lambda'$ является корнем характеристического многочлена $R(\lambda)$. Тогда из системы (16), (17) видим, что $\eta_{\lambda'-r}$ и $\xi_{\lambda'-r}$ можно задавать произвольными, а остальные ξ_λ и η_λ, где $\lambda=\lambda'+kr$, можем определить по формулам:

$$\eta_{\lambda'-2r}=-\frac{C(\lambda')}{A(\lambda'-r)}\xi_{\lambda'-r},\qquad \xi_{\lambda'-2r}=-\frac{C(\lambda')}{B(\lambda'-r)}\eta_{\lambda'-r},$$

$$\eta_{\lambda'-3r}=-\frac{C(\lambda'-2r)}{A(\lambda'-2r)}\xi_{\lambda'-2r}=\frac{(-1)^2C(\lambda'-2r)C(\lambda'-r)}{A(\lambda'-2r)B(\lambda'-r)}\eta_{\lambda'-r},$$

$$\xi_{\lambda'-3r}=-\frac{C(\lambda'-2r)}{B(\lambda'-2r)}\eta_{\lambda'-2r}=\frac{(-1)^2C(\lambda'-2r)C(\lambda'-r)}{B(\lambda'-2r)A(\lambda'-r)}\xi_{\lambda'-r},$$

. . . .

$$\eta_{\lambda'-kr}=\frac{(-1)^{k-1}C(\lambda'-(k-1)r)C(\lambda'-(k-2)r)\dots C(\lambda'-r)}{A(\lambda'-(k-1)r)B(\lambda'-(k-2)r)\dots B(\lambda'-2r)A(\lambda'-r)}\xi_{\lambda'-r}\ \text{при четном } k,$$

$$\eta_{\lambda'-kr}=\frac{(-1)^{k-1}C(\lambda'-k-1)\cdot C(\lambda'-(k-2)r)\dots C(\lambda'-r)}{A(\lambda'-(k-1)r)B(\lambda'-(k-2)r)\dots A(\lambda'-2r)B(\lambda'-r)}\eta_{\lambda'-r}\ \text{при нечетном } k,$$

$$\xi_{\lambda'-kr}=\frac{(-1)^{k-1}C(\lambda'-(k-1)r)C(\lambda'-(k-2)r)\dots C(\lambda'-r)}{B(\lambda'-(k-1)r)A(\lambda'-(k-2)r)\dots A(\lambda'-2r)B(\lambda'-r)}\eta_{\lambda'-r}\ \text{при четном } k,$$

$$\xi_{\lambda'-kr}=\frac{(-1)^{k-1}C(\lambda'-(k-1)r)C(\lambda'-(k-2)r)\ldots C(\lambda'-r)}{B(\lambda'-(k-1)r)A(\lambda'-(k-2)r)\ldots B(\lambda'-2r)A(\lambda'-r)}\xi_{\lambda'-r} \text{ при нечетном } k.$$

Из системы (16), (17) легко видеть, что $\eta_{\lambda'+kr}=\xi_{\lambda'+kr}=0$ для $k=0,1,2,\ldots$. Таким образом, по каждому корню λ' многочлена $R(\lambda)$ определяются два линейно-независимых решения уравнения (1).

Итак, m корни многочлена $R(\lambda)$ определяют $2m$ линейно-независимых решений уравнения (1). Таким образом, и при нечетном r уравнение (1) имеет $(2m+r)$ решений вида (7).

Теорема 3. Среди линейных комбинаций решений уравнения (1), упомянутых в теореме 2, содержится $2m$ линейно-независимых, m из которых равны нулю при $x<0$, а остальные m равны нулю при $x>0$.

Доказательство. Мы знаем, что уравнение (1) имеет самое большее r линейно-независимых решений, сосредоточенных в нуле. Они также описываются формулой (7). Среди оставшихся имеется $2m$ линейно-независимых решений, которые не сосредоточены в нуле.

В частности, среди них имеются $m_+\le m$ линейно-независимых решений при $x>0$. Обозначим их через $y_1,y_2,\ldots,y_{m_+}$ (далее мы увидим, что $m_+=m$). Остальные $2m-m_+$ решений не сосредоточены в нуле и являются при $x>0$ линейными комбинациями этих решений:

$$y_{m_++k}=\sum_{j=1}^{m_+}c_j^k y_j\,,\quad k=1,2,\ldots,(2m-m_+)\,.$$

Очевидно, что

$$z_k=y_{m_++k}-\sum_{j=1}^{m_+}c_j^k y_j\,,\quad k=1,2,\ldots,(2m-m_+)$$

являются линейно-независимыми решениями уравнения (1), равными нулю при $x>0$. Аналогично мы получаем, что имеются $u_1,u_2,\ldots,u_{2m-m_-}$ $(m_-\le m)$ линейно-независимых решений, не сосредоточенных в нуле и равных нулю при $x<0$. Все эти решения, вместе взятые, линейно-независимы. Отсюда следует, что их число $2m-m_++2n-m_-\le 2m$, $m_++m_-\ge 2m$, а так как $m_+\le m$, $m_-\le m$, то $m_+=m_-=m$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. При выполнении условий теоремы 2 размерность подпространства Ω равна $(2m+r)$.

Доказательство. Пусть $y(x)$ – произвольное из Ω. При $x>0$ оно совпадает с некоторым классическим решением, но среди найденных нами решений в обобщенных функциях имеется m линейно-независимых при $x>0$ и равных нулю при $x<0$. Эти решения при $x>0$ являются классическими и $y(x)$ является линейной комбинацией этих решений $z_1,\ldots,z_m$. Аналогично, $y(x)$ есть линейная комбинация линейно-независимых решений $u_1, u_2, \ldots, u_m$ при $x<0$. Отсюда следует, что функционал, определенной формулой

$$u \equiv y - \alpha_1 z_1 - \ldots - \alpha_m z_m - \beta_1 u_1 - \ldots - \beta_m u_m$$

с некоторыми коэффициентами $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ и $\beta_1, \ldots, \beta_m$, принадлежит к подпространству Ω_0. Поскольку размерность Ω_0 равна r (теорема 1), если обозначить через $w_1, w_2, \ldots, w_r$ базис в Ω_0, то получим, что $y(x)$ представляется в виде линейной комбинации $(2m+r)$ линейно-независимых решений $z_1, z_2, \ldots, z_m$, $u_1, u_2, \ldots, u_m$, $w_1, w_2, \ldots, w_r$, т.е.

$$y = \alpha_1 z_1 + \ldots + \alpha_m z_m + \beta_1 u_1 + \ldots + \beta_m u_m + \gamma_1 w_1 + \ldots + \gamma_r w_r \ .$$

Так как $y(x)$ произвольное из Ω, то теорема 4 доказана.

Замечание 1. Одновременно мы показали, что в условиях теоремы 4 каждое классическое решение уравнения (1) при $x>0$ (и при $x<0$) представляется некоторым рядом (7).

Замечание 2. Теорема 4 остается в силе и в случае, когда многочлен $R(\lambda)$ имеет обобщенно-кратные корни. Как естественно было ожидать, в этом случае решения уравнения (1) получаются в виде рядов как по обобщенным однородным функциям $f^{\lambda}(x)$ и $g^{\lambda}(x)$, так и по присоединенным к ним обобщенным функциям $f_k^{\lambda}(x)$ и $g_k^{\lambda}(x)$.

Замечание 3. Если в уравнении (1) все $b_q = 0$, то теорема 4 справедлива даже в K'.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Пространства основных и обобщенных функций. Физматгиз, Москва, 1958.
2. Гельфанд И.М., Шилов Г.Е. Обобщенные функции и действия над ними. Физматгиз, Москва, 1959.
3. Камке Е. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Физматгиз, Москва, 1965.
4. Митягин Б.С., Эскин Г.И. О регуляризации экспоненциально растущих в нуле функций. «Вестник Московского Университета», серия математика, механика, 1966, №2, с.18-21.
5. Митягин Б.С. О бесконечно дифференцируемой функции с заданными значениями производных в точке. ДАН СССР, т.138, №2, 289, 1961.
6. Алиев Ф.С. Формулы многократного дифференцирования и умножения на степени x некоторых обобщенных функций. Odlar Yurdu Universitetinin elmi və pedaqoji xəbərləri. Fizika, riyaziyyat, texnika və təbiət elmləri seriyası, №4, Bakı, «Odlar Yurdu» nəşriyyatı, 2000.
7. Aliyev F.S. Multiple differentiation formula of some generalized functions. Transactions of Academy of Sciences of Azerbaijan. Series of physical-technical and mathematical sciences, vol. XXI, №1, «Elm» publishing house, 2001.

BƏZİ XƏTTİ SİNQULYAR DİFERENSİAL TƏNLİKLƏRİN ÜMUMİLƏŞMİŞ FUNKSİYALAR FƏZASINDA FUNDAMENTAL HƏLLƏR SİSTEMİ

F.S.ƏLİYEV

XÜLASƏ

Məqalədə

$$Ly \equiv \sum_{k=0}^{m} a_k x^{k+r} y^{(k)}(x) + \sum_{q=0}^{n} b_q x^q y^{(q)}(x) = 0$$

tənliyinə $(S_0^\beta)'$ $(\beta > 1)$ **(**$m > n$ **,** $r > 0$ tam ədədlərdir**)** ümumiləşmiş funksiyalar fəzasında baxılır. Baxılan tənliyin bu fəzada $(2m+n)$ sayda fundamental həllər sistemi

$$y = \sum_{\lambda} \xi_\lambda f^\lambda(x) + \sum_{\lambda} \eta_\lambda g^\lambda(x)$$

şəklində tapılır. Burada λ fərqi r olan müəyyən ədədi silsilə üzrə dəyişir.

FUNDAMENTAL SYSTEM OF THE SOLUTIONS OF SOME LINEAR SINGULAR DIFFERENTIAL EQUATIONS IN THE SPACE OF GENERALIZED FUNCTIONS

F.S. ALIYEV

SUMMARY

In this work the equation

$$Ly \equiv \sum_{k=0}^{m} a_k x^{k+r} y^{(k)}(x) + \sum_{q=0}^{n} b_q x^q y^{(q)}(x) = 0$$

in the space $(S_0^\beta)'$ of generalized functions for some $\beta > 1$; $m > n$; $r > 0$, where m, n and r are natural numbers is considered.

Are founded $(2m+r)$ – linear independent solutions in the form

$$y = \sum_{\lambda} \xi_\lambda f^\lambda(x) + \sum_{\lambda} \eta_\lambda g^\lambda(x),$$

where λ changes on some arithmetic progressions with difference r, which construct fundamental system of solutions of considered equation.